

Universität Bielefeld

WS 1997/98

Seminar: Einführung in das ESL - Lehren und Lernen

Titel: Lernen durch Begriffe

Gliederung:

1. Zur Theorie der Begriffsbildung	Seite 3
1.1 Was ist ein Begriff?	Seite 3
1.2 Die Abstraktionstheorie	Seite 4
1.3 Die Konstruktionstheorie	Seite 6
1.4 Funktion und Leistung von Begriffen	Seite 8
2. Didaktische Folgerungen aus den Ergebnissen der Begriffstheorie	Seite 9
2.1 Didaktische Analyse eines Stoffes nach Klafki	Seite 9
2.2 Der Prozeß der Begriffsbildung	Seite 10
2.2.1 Der Aufbau eines Begriffsinhaltes	Seite 10
2.2.2 Die Durcharbeitung von Begriffen	Seite 11
2.2.3 Der Prozeß der Begriffsanwendung	Seite 12
3. "Lernen durch Begriffe" anhand des Beispiels der linearen Funktion	Seite 13

Literaturangaben:

Aebli, Hans: *Zwölf Grundformen des Lehrens; Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage*. Stuttgart: Klett-Cotta, 1990.

Bussmann, Hans: *Mathematiklernen als symbolische Konstruktion*. Frankfurt 1992.

Hoffmann, Joachim: *Die Welt der Begriffe; Psychologische Untersuchungen zur Organisation des menschlichen Wissens*. Weinheim: Beltz, 1986.

Oerter, R., Dreher, M.: *Entwicklung des Problemlösens*. Aus: Oerter, R., Montada, L.: *Entwicklungspsychologie*. Weinheim: Beltz, 1995.

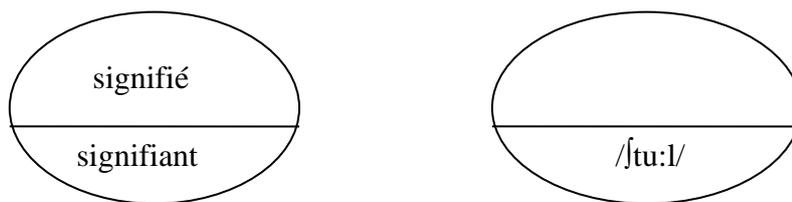
Pelz, Heidrun: *Linguistik: Eine Einführung*. Hamburg: Hoffmann und Campe, 1996.

1. Zur Theorie der Begriffsbildung

1.1 Was ist ein Begriff?

Man muß sich verdeutlichen, daß man die laut- oder schriftsprachliche Kodierung, also den Namen, nicht mit dem Begriff selbst gleichsetzen darf. Der französische Sprachwissenschaftler Ferdinand de Saussure hat hierzu die Unterscheidung in "signifiant" (Bezeichnendes) und "signifié" (Bezeichneten) eingeführt. Den "signifié" kann man mit dem "Begriff" gleichstellen und den "signifiant" mit dem Namen (siehe Abb.1.1). De Saussure weist daraufhin, daß das Verhältnis zwischen "signifiant" und "signifié" arbiträr, also willkürlich ist. Am deutlichsten wird diese Willkür, wenn man sich vor Augen hält, wie viele Namen ein und derselbe Begriff hat, allein schon durch die verschiedenen Sprachen. So heißt der Begriff "Stuhl" im Deutschen "Stuhl", im Französischen "la chaise" und im Englischen "chair".

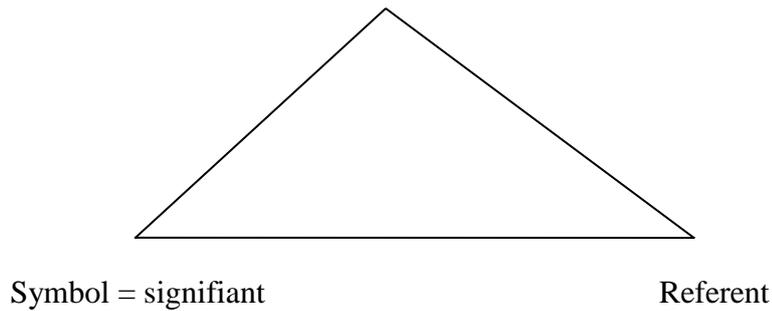
Abb.1.1:



Bei dem de Saussureschen Zeichenmodell fehlt aber dem abstrakten Begriff die Verbindung zur außersprachlichen Wirklichkeit. Das sogenannte *semiotische Dreieck* von Ogden und Richards (siehe Abb.1.2) erweitert die Zweiheit von Ausdruck und Inhalt um den "Referenten", die bezeichnete außersprachliche (konkrete oder abstrakte oder nur vorgestellte) Sache. Hier zeigt sich der einmalige Charakter von Begriffen: der Transfer von bekannten Begriffen auf neue Situationen. Dadurch können mit endlichen Mitteln unendliche Mengen von Problemsituationen bewältigt werden. Aus diesem Grund ist das Begriffslernen auch die wichtigste und effizienteste Grundform des Lernens.

Abb.1.2:

Gedanke = signifié

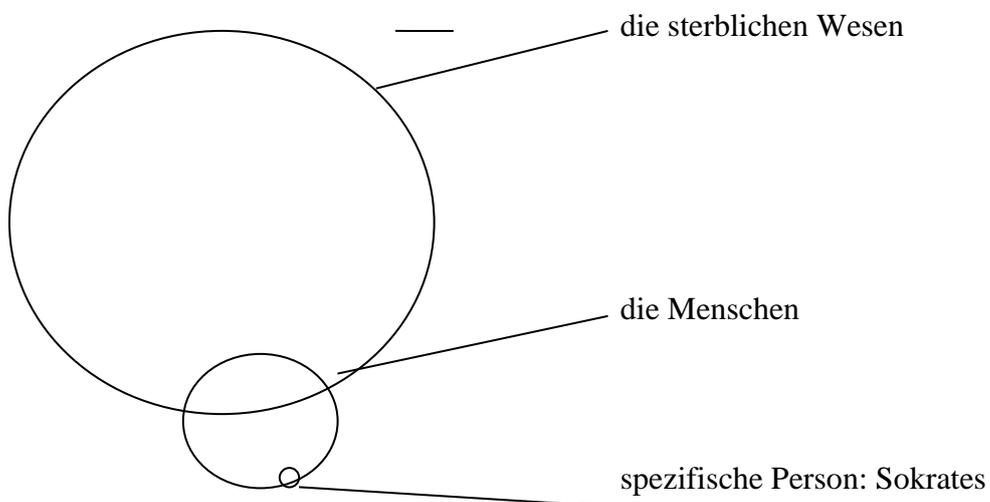


1.2 Die Abstraktionstheorie

Die Abstraktionstheorie ist ein empirischer Ansatz der Begriffstheorie, der auf Aristoteles zurückgeht. Diese Theorie, die häufig zur Erklärung der Begriffsbildung herangezogen wird, entstand eigentlich nicht aus der Frage "wie wird ein Begriff gebildet", sondern aus der logischen Analyse dessen, was ein Begriff ist.

Die Gegenstände der Wahrnehmung werden nach logischen Gesichtspunkten analysiert und in Klassen eingeteilt. Man kann eine Menge von Gegenständen zu Kategorien zusammenfassen, indem man bei den Klassen Grenzenangaben macht. Um in eine höhere Kategorie zu gelangen, entfernt man unwichtige, akzidentielle Merkmale. Dadurch entsteht ein pyramidaler bzw. kreisförmiger Aufbau eines Begriffs. Demnach kann man sich einem Begriff annähern, indem man sich von ihm entfernt, also den Begriff abstrahiert.

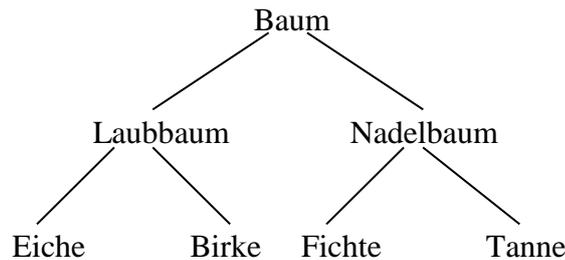
Abb.2.1: kreisförmiger Aufbau



Erklärung der Abb.2.1: Man geht von dem untergeordneten Begriff „spezifische Person“, also

Sokrates, aus. Man gelangt zum Begriff „Mensch“, indem man alle spezifischen, individuell zutreffenden Merkmale der Person außer Acht läßt. Mit anderen Worten, indem man alle unwesentlichen, zufälligen Eigenschaften (= Akzidentien) abstrahiert. Durch eine weitere Abstraktion erhält man den Oberbegriff „sterbliche Wesen“.

Abb.2.2: pyramidaler Aufbau



Erklärung der Abb.2.2: Durch Abstraktion der Akzidentien von den untergeordneten Begriffe „Eiche“, „Birke“, „Fichte“ und „Tanne“ erhält man die übergeordneten Begriffe „Laubbaum“ bzw. „Nadelbaum“. Wenn man die spezifischen Merkmale von „Laubbaum“ und „Nadelbaum“ außer Acht läßt, gelangt man zum Oberbegriff „Baum“.

Die Abstraktionstheorie ist jedoch in sich unlogisch, denn der hierarchische Aufbau eines Begriffs kann nicht begründen, wie man zu solchen Kategorien gelangt. Der Nachteil der Hierarchisierung liegt darin, daß sie das, was sie erklären soll, voraussetzt - das Denken. Um überhaupt Kategorien bilden und unterscheiden zu können, muß man bereits vorher das Unterscheidungsprinzip gedanklich gebildet haben. Nun stellt sich immer noch die Frage, woher wir unsere Begriffe haben. *Platon* hat dazu seine Zweiweltentheorie aufgestellt. Er geht davon aus, daß uns die Begriffe aus einer anderen Welt eingepflanzt worden sind. Wir müssen uns lediglich an sie erinnern. Somit handelt es sich bei der Abstraktionstheorie eigentlich nicht um die Begriffsbildung, sondern um die Begriffsfindung. Die Gründe für diese Kritik liegen in der Elimination von Merkmalen: Man hat an der Basis einer Begriffspyramide einen Begriff. Wenn man nun in der Folge von einem oder mehreren ihre Merkmale abstrahiert, kommt dabei nichts Neues heraus, da man nur Merkmale wegläßt. Das bedeutet, daß man von Anfang an schon alle Merkmale gekannt haben muß, um dann von einigen absehen zu können.

Ein Begriff läßt sich analytisch in *Begriffsinhalt* und *Begriffsumfang* zerlegen. *Aebli* definiert diese beiden Bezeichnungen folgendermaßen:

"Der Begriffsinhalt ist ein Gefüge von Merkmalen und Eigenschaften, die untereinander durch Beziehungen verknüpft sind.

Dieses Beziehungsnetz bestimmt oder kennzeichnet in seiner Gesamtheit den Begriff."

"Der Begriffsumfang ist die Menge der Exemplare, Objekte, welche die im Begriffsinhalt zusammengefaßten Kennzeichen aufweisen."

(Aus: Aebli, Hans: Grundformen des Lehrens. Eine allgemeine Didaktik auf kognitionspsychologischer Grundlage, Stuttgart 1976.)

Wenn man diese beiden Bezeichnungen auf die Abb.2.2 anwendet, hieße das, daß der Begriffsumfang vom Begriffsinhalt "spezifische Person" nur Sokrates enthält. Dagegen hat der übergeordnete Begriff „die Menschen“ einen größeren Begriffsumfang. Der Oberbegriff „die sterblichen Wesen“ hat den größten Begriffsumfang, da seine Menge nicht nur aus den Menschen, sondern auch aus den Tieren und Pflanzen besteht. Anhand dieses Beispiels zeigt sich sehr gut die Relation zwischen Begriffsumfang und Begriffsinhalt:

Der Begriffsumfang nimmt mit zunehmender Abstraktheit des Begriffsinhaltes zu.

Die Abstraktionstheorie befaßt sich mehr mit dem Begriffsumfang, wohingegen die Konstruktionstheorie ihren Schwerpunkt auf den Begriffsinhalt legt.

1.3 Konstruktionstheorie

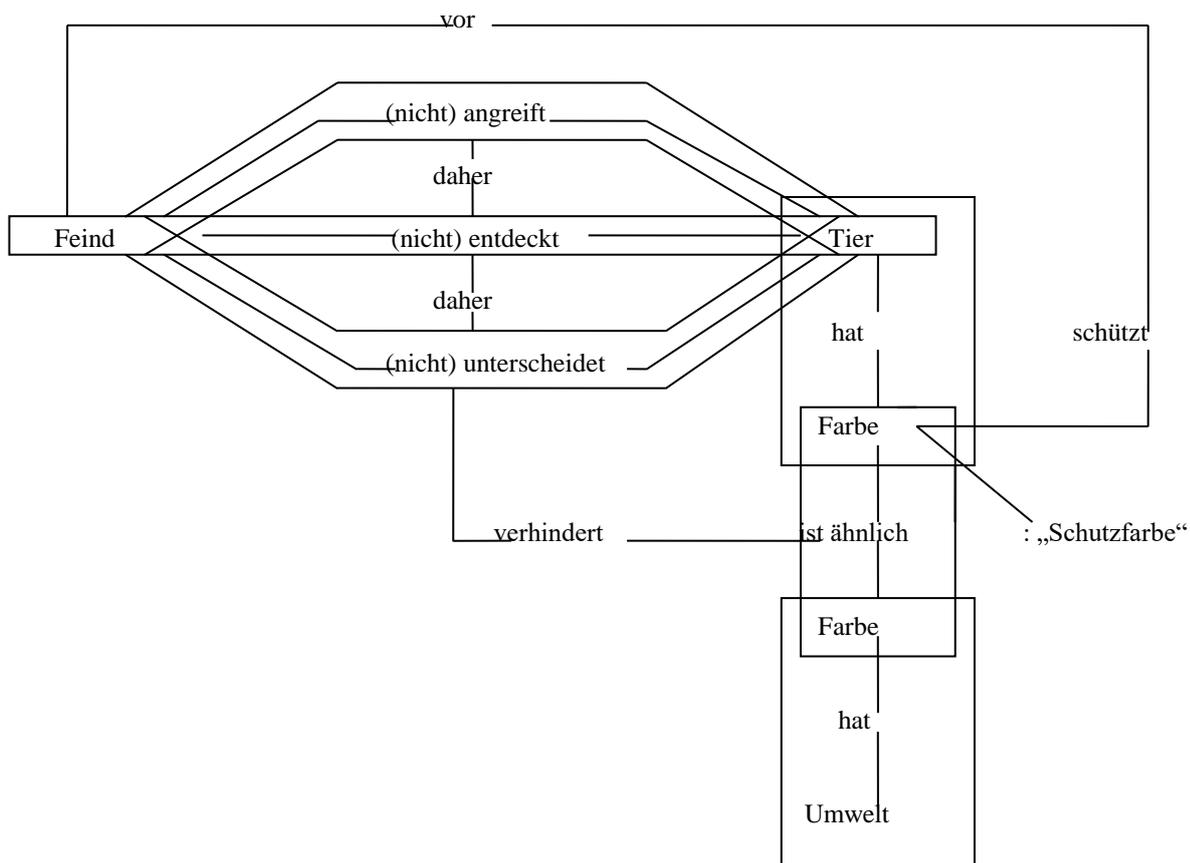
Im Gegensatz zur Abstraktionstheorie ist die Konstruktionstheorie ein produzierender Ansatz. Diese Theorie versucht aus den Regeln des Denkens, die Begriffsbildung abzuleiten. Elemente und Merkmale von elementaren Sinnesempfindungen werden zu einem Begriffsnetz verknüpft, deren abstraktere Relationen nach dem Verbindungsgesetz festgelegt werden. Die abstrakten Verbindungen, die nach der Abstraktionstheorie hierarchisch angeordnet sind, sind nach der Konstruktionstheorie simultan mit ihren konkreten Merkmalen im Bewußtsein präsent. Es wird also keine Begriffspyramide aufgebaut, sondern man stellt die Begriffsinhalte in einem Netz dar. Mit anderen Worten: Zur Lösung eines Handlungs- oder Denkproblems werden gedankliche Elemente aus dem Wissen abgerufen und miteinander verknüpft. Durch diese Verknüpfungen wird ein neuer Begriffsinhalt konstruiert. Das heißt also, daß der Begriffsinhalt ein Netz von Beziehungen zwischen Merkmalen ist. Der Begriffsumfang ist die Menge der Fälle oder Exemplare, auf die der Begriffsinhalt anwendbar ist.

Im folgenden soll anhand des Beispiels der Schutzfarbe (siehe Abb.2.3) die Konstruktionstheorie näher erläutert werden.

Die Elemente, welche in ihrer Verknüpfung den Begriffsinhalt konstituieren, sind: ein Tier, seine Farbe, sein Feind, die Umwelt des Tieres und deren Farbe. Die Beziehungen zwischen diesen Elementen werden durch Verben ausgedrückt: angreifen, entdecken, unterscheiden, verhindern und schützen. Durch die Beziehung „die Farbe des Tieres schützt das Tier vor seinem Feind“ erhält man den Begriff „Schutzfarbe“.

Dieses Beispiel zeigt deutlich, daß ein Begriffsinhalt Formelcharakter hat. Man kann für alle vorkommenden Teilbegriffe alle möglichen spezifischen Werte einsetzen, zum Beispiel für das „Tier“ den „Frosch“, für „seine Farbe“ „grün“ und für „seinen Feind“ den „Storch“.

Abb.2.3:



Nun stellt sich die Frage, warum Begriffsinhalte in einem Netz dargestellt werden. Die Netzdarstellung entspricht dem Wissen über die Art und Weise, wie Begriffsinhalte im

menschlichen Wissen gespeichert sind. Gedächtnisinhalte sind nicht Ketten von Worten oder Bildern. Begriffe und Vorstellungen, die im Gedächtnis als Wissen gespeichert sind, haben vielfache Beziehungen zu Nachbarbegriffen.

Der Begriff "Parallelität" veranschaulicht sehr gut, daß Begriffe Konstruktionen des Verstandes sind, die in der Realität nicht existieren. Zum Beispiel sind in der Realität keine zueinander parallelen Straßen vorhanden, da sie sich auf jeden Fall irgendwo treffen würden oder auseinander gehen. Somit ist die Parallelität nur eine idealisierte Form der Anschauung. Immanuel Kant sagte dazu, daß der Begriff "Parallelität" nicht aus der empirischen Wahrnehmung, sondern rein aus dem Verstand gewonnen wird.

Da in der Schule nicht nur die sensomotorische Begriffsbildung, also die Bildung von Begriffen durch das Handeln über die verschiedenen Sinne, sondern die konkret-operationale und vor allem die formale Begriffsbildung, also die aufbauende Begriffsbildung, gelernt und gefordert wird, nimmt die Konstruktionstheorie eine wichtige Stellung in dem Prozeß der Begriffsbildung ein. Das soll im zweiten Teil dieser Ausarbeitung näher erläutert werden.

1.4 Funktion und Leistung von Begriffen

Joachim Hoffmann stellt in seinem Buch „Die Welt der Begriffe“ die Funktion und Leistung von Begriffen sehr deutlich dar:

„Begriffe beeinflussen die Wahrnehmung unserer Umwelt, die Organisation unseres Verhaltens, die sprachliche Kommunikation, die Leistungen unseres Gedächtnisses und schließlich das Denken im Sinne der Lösung von Problemen.“

Begriffe sind Bausteine unserer geistigen Tätigkeit. Wir brauchen Begriffe zur Widerspiegelung unserer Umwelt, zum Denken überhaupt. Das heißt, durch das Lernen und Gebrauchen von Begriffen sind wir in der Lage, unserer Umwelt zu organisieren, zu analysieren und zu kategorisieren. Mit anderen Worten, wir sehen unsere Welt in den Begriffen, die wir zur Klassifizierung unserer Umwelt gebildet haben bzw. bilden konnten.

„Die bloße Anschauung genügt nicht, sondern wir brauchen Begriffe, um sehend zu werden.“ (Immanuel Kant)

2. Didaktische Folgerungen aus den Ergebnissen der Begriffstheorie

2.1 Didaktische Analyse eines Stoffes nach Klafki

Bevor der Lehrer mit den Schülern ein Repertoire von einsatzfähigen Begriffen erarbeitet, muß er bereits bei der Unterrichtsvorbereitung bestimmte Überlegungen anstellen. *Klafki* spricht von einer didaktischen Analyse des Unterrichtsstoffes. Zu diesem Zweck ist es notwendig, daß der Lehrer sich folgende Fragen zu seinem Unterrichtsthema stellt:

1. "Welchen größeren bzw. welchen allgemeinen Sinn oder Sachzusammenhang vertritt oder erschließt dieser Inhalt?"
"Wofür ist er exemplarisch, repräsentativ oder typisch?" "Wo läßt sich das an diesem Thema zu Gewinnende fruchtbar machen?"
2. "Welche Bedeutung hat die zu gewinnende Erfahrung, Erkenntnisfähigkeit oder Fertigkeit bereits im geistigen Leben der Kinder meiner Klasse, welche Bedeutung sollte er darin haben?"
3. "Worin liegt die Bedeutung des Themas für die Zukunft der Kinder?"
4. "Welches ist die Struktur des Inhaltes? Welche Eigentümlichkeiten werden den Kindern den Zugang zur Sache vermutlich schwer machen? Was hat als notwendiger, festzuhaltender Wissensbesitz zu gelten, wenn er lebendig und einsatzfähig sein soll?"
5. "An welchen besonderen Erscheinungen wird die Struktur des Inhaltes der Klasse interessant, fragwürdig, zugänglich, begreiflich, 'anschaulich'?"

(Klafki, W.: Das pädagogische Problem des Elementaren und die Theorie der kategorialen Bildung. Weinheim: Beltz, 1964, 3. Auflage, S.15-22)

An den aufgeführten Fragen erkennt man, daß die didaktische Analyse im wesentlichen eine begriffliche Analyse eines Stoffes erfordert. *Klafki* sieht diese Analyse in drei Ausprägungen:

- A) als strukturelle Analyse im sachlogischen Sinne des Wortes; d.h. eine Analyse der Binnen- und der Außenbeziehungen des Begriffsinhaltes; m.a.W. der Lehrer muß sich Rechenschaft über das System der Begriffe ablegen, die er in seinem Unterricht vermitteln will.
- B) als eine psychologische Analyse der außerschulischen und der schulischen Vorerfahrungen der Kinder; sie liefert die Anknüpfungspunkte und macht den Unterricht erst interessant.
- C) als Reflexion der Anwendungsmöglichkeiten der erworbenen Strukturen durch den Lehrer; d.h. die Frage der Zukunftsbedeutung im Bezug auf die künftigen Lebensumstände der Schüler.

2.2 Der Prozeß der Begriffsbildung

Die Begriffsbildung im Unterricht erfolgt in der Schritten:

1. Der Aufbau des Begriffsinhaltes
2. Die Durcharbeitung der Begriffe
3. Der Prozeß der Begriffsanwendung

Im folgenden Teil sollen diese drei Schritte der Begriffsbildung erklärt werden.

2.2.1 Der Aufbau des Begriffsinhaltes

Es gibt verschiedene didaktische Formen des Begriffsaufbaus im Unterricht, die alle unter Anleitung des Lehrers erfolgen. *Aebli* unterscheidet hier drei Vorgehensweisen:

1. Der erklärende Aufbau:

Die Einführung eines neuen Begriffs nach diesem Vorgehen ist die konservativste Methode. Der Lehrer erklärt einen neuen Begriff und die Schüler müssen diese Erklärung nachkonstruieren können. Diese Form gleicht dem Verfahren des Erzählens. Jedoch muß man sich hier vor Augen halten, daß die Leistung des Schülers, die Erklärung des Lehrers nachzuvollziehen, anspruchsvoller ist als im Falle des Erzählens. Die Ursache hierfür liegt in der Neuheit der begrifflichen Verknüpfungen. Aus diesem Grund läuft der Lehrer bei dieser Methode schnell Gefahr, daß einzelne Schüler oder die ganze Klasse nicht in der Lage sind, seine Erklärung nachvollziehen zu können. Hier stellt sich dann die Frage, ob der Lehrer das sofort merkt.

2. Der selbständige Aufbau durch den Schüler:

Bei dieser Methode erfolgt der Aufbau eines Begriffsinhaltes ohne den Lehrer. Jedoch gelingt dem Schüler die selbständige Bildung eines Begriffs nur in seltenen Fällen.

3. Der problemlösende Aufbau:

Der Aufbau eines Begriffs durch Problemlösen ist die beste Methode der Begriffsbildung. Sie erfolgt durch das lenkende und helfende Eingreifen des Lehrers. Am Anfang der Begriffsbildung steht ein Problem, das den Rahmen für die folgende Erklärung bildet. In dieser Form ist der entscheidende Ausdruck das "Warum", d.h. die Frage nach einem Geflecht von Beziehungen (siehe Abb.2.3). Die Erklärung wird in Teilschritten mit dem Wissensrepertoire der Schüler erarbeitet. Die Konstruktion der Verknüpfungen von alten und neuen Begriffen strebt einer abschließenden Spitze zu. Der Begriffsaufbau wird mit der Benennung der obersten Beziehung abgeschlossen, d.h. der aufgebaute Begriffsinhalt erhält einen Begriffsnamen, der stellvertretend für den begrifflichen Inhalt

ist.

Damit das Verständnis für die Erklärung gewährleistet ist, ist es notwendig, entscheidende Aufbauschritte mehrmals, in Variationen zu formulieren und vom Schüler formulieren zu lassen. Es besteht auch die Möglichkeit, gewisse Verständniskontrollen anzuknüpfen. Ein weiteres Problem entsteht in der Abfolge der Teilschritte der Erklärung. Sie könnte dem Schüler als linearer Prozeß erscheinen. Jedoch stellt das Ergebnis ein Netz dar. Damit dieses Mißverständnis vermieden wird, müssen während des Aufbaus bereits erklärte Verknüpfungen und Beziehungen immer wieder konsolidiert werden, um auf sie zurückgreifen zu können. Teilergebnisse müssen bewußt festgehalten und eingeprägt werden. Das kann man durch die mehrmalige Wiederholung erreichen, oder indem man die Teilergebnisse von verschiedenen Seiten beleuchtet. Die Konsolidierung kann durch ein Tafelbild verstärkt werden. Durch die netzartige Anordnung von Stichwörtern wird auch der Netzcharakter von Begriffsinhalten noch deutlicher. Hinzu kommt, daß die Reproduktion von bereits erklärten Verknüpfungen und Beziehungen in diesem Netz nicht aus dem Gedächtnis erfolgt, sondern durch das Ablesen von der Tafel.

Die Leitvorstellung derartiger Wissensnetze muß die der Kohärenz sein. Es sollen nicht beziehungslose Brocken von Wissen vermittelt werden. Es ist wichtig, daß sich der Schüler die einzelnen Aufbauschritte einprägt, um sich in einem System von Beziehungen gut auszukennen. Der Schüler soll das Beziehungsnetz als eine kognitive Landkarte betrachten. Das ist die Voraussetzung dafür, sich in der Realität zurechtfinden und Handlungen und Gedanken darin richtig plazieren zu können. Es soll ein in sich kohärentes Weltbild, ein Bild der Realität und der in ihr stattfindenden Prozesse entstehen. Den Begriffsaufbau kann man auch als eine gedankliche Rekonstruktion und eine begriffliche Darstellung eines Stücks Wirklichkeit bezeichnen. Der Aufbau durch Verknüpfung (der Netzcharakter des resultierenden Wissens), seine Abgrenzung und die vergegenständliche Benennung schafft die Möglichkeit, den Begriff auf neue Situationen zu übertragen.

2.2.2 Die Durcharbeitung von Begriffen

Die Durcharbeitung neuer Begriffe ist dringend notwendig, damit die Schüler in der Lage sind, die gelernten Begriffe auf neue Situationen anwenden zu können. Neue Begriffe können nur Instrumente eines lebendigen Denkens werden, wenn die dazu notwendigen Transformationen vorgenommen worden sind. Durch solche Transformationen wird gewährleistet, daß die Begriffe nicht an besondere Bedingungen aus der Einführung haften. Die innere Struktur der Begriffe muß

beweglich und damit anpassungsfähig sein. Die wesentlichen Beziehungen in einem Begriffsnetz müssen dem Schüler einsichtig sein, damit er in der Lage ist, diese Zusammenhänge in neuen Situationen wiederzuerkennen.

Die Schüler erwerben diese Transparenz der Begriffe nur, indem man die Begriffe noch einmal durcharbeitet. Das Ziel dieser Durcharbeitung sollte darin liegen, daß sich das Denken der Schüler auf verschiedenen Wegen durch ein Begriffsnetz bewegen kann. *Piaget* hat hierfür die Bezeichnung "Dezentrierung" eingeführt. Die Dezentrierung des Denkens geschieht durch den Wechsel der Gesichtspunkte. Nur wenn der Schüler in der Lage ist, bei jedem Element des Netzes "einzusteigen", kann man sagen, daß die Bedeutung eines Begriffs nicht mehr an den Worten hängt, sondern im Netz selbst realisiert ist. Anhand des Beispiels der „Schutzfarbe“ könnte das bedeuten, daß man diesen Begriff auf ein anderes Tier überträgt und das Begriffsnetz aus der Sicht des Feindes aufbaut.

2.2.3 Der Prozeß der Begriffsanwendung

Mit dem Prozeß der Anwendung sollen die Voraussetzungen geschaffen werden, welche die Möglichkeiten bieten, einen gelernten Begriff auf neue Situationen übertragen zu können.

Man unterscheidet bei der Anwendung von Begriffen zwischen *erkennender* und *herstellender Anwendung*. Jedoch gibt es eine Menge von Mischformen dieser beiden Anwendungsweisen.

Erkennende Anwendung:

Es ist eine Situation gegeben, in der die konstitutiven Merkmale des Begriffs in ihren speziellen Verbindungen bereits vorhanden sind. Sie müssen nur noch erkannt werden. Bsp.: Man sieht einen Baum und stellt fest, daß es ein Baum ist.

Herstellende Anwendung:

Es ist eine relativ leere Situation gegeben. Man kann aus ihr den Begriff nicht „ablesen“, sondern man muß die Merkmale und Zusammenhänge des Begriffs aus dem Gedächtnis rekonstruieren. Bsp.: Man bekommt ein Blatt Papier mit dem Auftrag, eine Brücke zu zeichnen.

In den meisten Fällen sind beide Aspekte der Anwendung gefragt. Bsp.: die Beseitigung eines Flecks. Zuerst muß der Fleck erkannt werden, danach muß der Begriff der „Beseitigung“ hergestellt werden.

Erkennende und herstellende Anwendung bedingen sich also gegenseitig.

3. "Lernen durch Begriffe" anhand des Beispiels der linearen Funktion

Im Mathematikunterricht wird vor allem das formale Denken gefordert. Mathematische Begriffe müssen jedoch erst aufgebaut werden, genauso wie alle anderen Gegenstände, die man im alltäglichen Leben braucht. Sie sind nicht einfach da, sondern mußten erst konstruiert werden. Solch ein Aufbau von mathematischen Begriffen soll anhand der linearen Funktion dargestellt werden.

Zu Anfang steht der Begriff des Vergleichens. Jedoch gibt es verschiedene Formen des Vergleichens, dies soll anhand des folgenden Beispiels gezeigt werden:

Man vergleicht die Sprungweite eines Löwen mit der eines Flohs. Der Löwe springt 6m, der Floh 60cm. Im absoluten Vergleich ist der Löwe der bessere Springer. Jedoch setzt man die Sprungweite des Löwen und die des Flohs in Relation zu ihrer Körpergröße und vergleicht diese Verhältnisse, so ist der Floh der bessere Springer.

Somit kann man auf zwei (oder mehrere) Arten und Weisen vergleichen: Erstens indem man die *Differenzen* der Maßzahlen für die zu vergleichenden Größen bildet oder zweitens indem man zuerst *Verhältnisse* bildet und diese dann vergleicht.

Bei jüngeren Kindern ist der Begriff des Vergleichs durch Differenzenbildung schon früh in ihrem Bewußtsein vorhanden. Kleiner zu sein, weniger zu dürfen, schwächer zu sein - das alles lief auf den Vergleich durch Differenzenbildung heraus. Der Begriff des Vergleichs von Verhältnissen wird ganz langsam gebildet.

Anhand eines Gläserexperimentes soll der Begriff des Vergleichs von Verhältnissen noch einmal veranschaulicht werden (dieser Versuch wurde auch in dem von *Suarez* inszenierten Film "Lineare Funktionen" mit Kindern gemacht):

Man hat zwei Gläser, ein dickes und ein dünnes, deren Grundflächen im Verhältnis 3 : 2 zueinanderstehen. Beide Meßzylinder sind mit Maßeinheiten durch Striche gekennzeichnet. Das dicke Glas wird bis zum vierten Strich gefüllt. Diese Flüssigkeit gießt man nun in das dünne Glas, das bis zum sechsten Strich gefüllt wird. Diesen Vorgang wiederholt man mehrere Male mit verschiedenen Flüssigkeitsmengen. Man kann nun folgende Wertetabelle aufstellen:

0	----->	0
1	----->	1,5
2	----->	3
3	----->	4,5

$$4 \text{ -----} > 6$$

Man liest den Pfeil "----->" als: "wird zugeordnet zu"

Man kann das Verständnis für den Vergleich von Verhältnissen bei den Kindern fördern, indem man sie

- die gefundenen Werte zuordnen läßt
- das Ergebnis dieser Zuordnung zeichnerisch darstellen läßt und
- die Verhältnisse einzeichnen läßt (Steigungsdreieck), (siehe Abb.3.1)

Wenn man zwei Verhältnisse miteinander vergleicht und feststellt, daß sie die gleichen Werte haben (hier: 1,5), dann spricht man von einer *Proportion*. Wird dieser Begriff von Kindern gebildet und gebraucht, spricht man von *proportionalem Denken*. Der Begriff der Proportion vereint im Bewußtsein die Unterbegriffe *Verhältnisse* und *Gleichheit*. Wenn diese beiden Begriffe wieder auftauchen, dann stehen sie nicht disparat da, sondern man erkennt ihre Kohärenz. In dem Gläserexperiment zeigt sich dieser Zusammenhang in dem konstanten Wert $y/x = 1,5$. Die Gleichung $y = 1,5 x$ ist das (kognitive) Schema, das der Proportion ihr Bild verschafft. Zeichnet man die x-Werte mit ihren zugeordneten y-Werten in einen Graphen, so erhält man einen "geraden Strich" mit einer bestimmten Steigung. In Anlehnung an die gerade Linie spricht man hier auch von der *linearen Funktion*.

In dem Film "Lineare Funktionen" werden die Schwierigkeiten der Kinder bei der Begriffsbildung des Vergleichs von Verhältnissen deutlich:

- sie wandten das alte Schema des Vergleichs an: die Differenzenbildung für die Maßzahlen von Größen;
- der eigene Körper war der natürliche Maßstab für Größenvergleiche. Er war *Zentrum des Ego*; eine Dezentrierung hatte noch nicht stattgefunden;
- der Zahlbegriff war lange Zeit der der natürlichen Zahlen; die Erweiterung des Begriffs auf die Bruchzahlen erfolgt nur sehr langsam und widerwillig;

Das größte Problem im Unterricht ist, das Denken in Begriffen und das Urteilen durch Begriffe zu ermöglichen. Durch die Konfrontation von Bildern und Symbolen wird bei den Kindern längst kein Denken erzeugt. Die Bemühungen ums Denken liegen also nicht in der Konfrontation mit den fertigen Resultaten des Denkens, sondern es ist wichtig, daß der Begriff gemeinsam aufgebaut wird.

Abb.3.1:

y dünnes Glas



