Numerische Methoden für Variationsungleichungen

Aufgabenstellung, analytische Eigenschaften.

1 Numerische Methoden für Variationsungleichungen

11 Aufgabenstellung, analytische Eigenschaften

111 Motivation:

Ziel dieses Seminarvortrages ist es, einige wichtige Eigenschaften von Variationsungleichungen darzustellen und so die Grundlagen für die folgenden Vorträge zu schaffen. Wie Variationsungleichungen entstehen, soll nun beschrieben werden.
Schwache Formulierungen partieller Differentialgleichungen lassen sich häufig in Form von Variationsgleichungen darstellen. Diese bilden notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen für die Minimierung konvexer Funktionale über einem linearen Unterraum oder über einer linearen Mannigfaltigkeit in einem entsprechendem Funktionenraum. Die zulässigen Mengen bei der Modellierung von Variationsproblemen sind durch Restriktionen beschränkt. Daher haben sie häufig andere Strukturen. In diesem Fall führen Optimalitätsbedingungen nicht mehr unbedingt zu Variationsgleichungen, sondern es treten Variationsungleichungen auf.

112 Definition (Variationsungleichung)

V sei ein reeller Hilbertraum, sei eine abgeschlossene konvexe Menge mit ,

sei Abbildung.

Betrachtet werde folgende Aufgabenstellung :

Finde ein derart, daß gilt:

(*)

,

wobei der Wert eines Funktionals für das Element bezeichne.

Dann heißt **(*)** Variationsungleichung und u heißt Lösung dieser Variationsungleichung.

113 Bemerkung

Falls G ein linearer Unterraum von V ist, dann gilt für beliebige .

Da linear ist, gilt daß die Beziehung (*) **aus der Definition 1.1.2 in diesem Spezialfall** äquivalent zu der Beziehung

ist.

Variationsgleichungen stellen also eine spezielle Form der Variationsungleichungen dar.

114 Vereinbarungen:

Es seien nun folgende Vereinbarungen für den Operator *F* festgelegt:

- *F* sei stark monoton auf *G*. Das bedeutet:
- *F* sei Lipschitz-stetig, auf folgende Weise:

nichtfallend: , wobei

.

115 Lemma

Mit den Vereinbarungen aus Kapitel 1.1.4 gilt:

nichtfallend: .

Beweis:

Weil gilt, gibt es mindestens ein . Dieses sei nun fest. Aus der zweiten Vereinbarung aus 1.1.4 folgt mit der Definition der Norm des Dualraumes die Abschätzung:

.

Das liefert:

.

Mit

folgt die Behauptung. **Q.E.D.**

<u>116</u> **<u>Lemma</u>**

Sei konvex und abgeschlossen, . Dann gilt:

.

Der durch $Py := u$ definierte Projektor ist nichtexpansiv, das bedeutet:

.

<u>Beweis:</u>

Sei beliebig und fixiert. Betrachtet werde die Variationsaufgabe

, mit .

Da und weil für alle gilt, ist endlich. Es sei eine beliebige, monotone Folge mit:

und .

Nach der Definition des Infimums existiert eine Folge mit:

(*)

Insbesondere gilt damit auch für ein beliebiges :

Daraus folgt, daß die Folge beschränkt ist. Wegen der Reflexivität von V *ist damit* schwach kompakt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit konvergiere schwach gegen ein . Da Q *konvex und abgeschlossen ist, ist* Q *auch schwach abgeschlossen. Damit gilt*

. Die Konvexität und Stetigkeit des Funktionals sichert die schwache Unterhalbstetigkeit. Hieraus folgt:

Mit **(*)** erhält man so, daß die oben genannte Variationsaufgabe löst. Wegen der speziellen Gestalt des Funktionals gilt damit:

(**) , für alle .

Gezeigt wird nun die Eindeutigkeit von . Sei also ein weiteres Element mit:

, für alle .

Daraus folgt mit **(**)**, sowie bzw. :

Also ist . Also ist die Abbildung eindeutig definiert. Aus

, für alle

, für alle

erhält man mit bzw. durch Addition

bzw.

.

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung liefert dies die Behauptung der Nichtexpansivität des Projektors. **Q.E.D.**

<u>117 Satz (Existenz und Eindeutigkeit für Lösungen der Variationsungleichung)</u>

Die Variationsgleichung aus der Definition 1.1.2 besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung , und es gilt folgende Abschätzung:

,

wobei die in Lemma 1.1.5 definierte Funktion ist.

Beweis:

Analog zum Beweis des Lemmas von Lax-Milgram, wird zuerst eine geeignete kontrahierende Abbildung konstruiert. Da aber die Abbildung *F*, im Unterschied zu den Voraussetzungen des Lax-Milgram-Lemmas, nicht global Lipschitz-stetig ist, wird eine zusätzliche, von einem Parameter abhängige Einschränkung getroffen. Diese ist für hinreichend große Parameter unwirksam, was mit Hilfe einer a-priori Abschätzung nachweisbar ist. Deshalb kann diese Einschränkung entfallen.

Sei so gewählt, daß gilt, für . Als Durchschnitt zweier abgeschlossener konvexer Mengen ist auch abgeschlossen und konvex. Mit dem Rieszschen Darstellungsoperator und dem nach Lemma 1.1.6 erklärtem Projektor definieren wir eine Abbildung durch

, für alle und ein fester Parameter.

Wir untersuchen nun das Kontraktionsverhalten von in Abhängigkeit der Parameter .

Da nach Lemma 1.1.6 der Projektor nichtexpansiv ist, genügt es, den Operator auf zu untersuchen.

Es gilt (vgl. Beweis des Lax-Milgram-Lemmas):

=

=

für alle .

Mit Lemma 1.1.6 folgt hieraus die Kontraktivität von auf für Parameter

. Mit dem Banachschen Fixpunktsatz erhält man die Existenz eines eindeutig

bestimmten mit .

Aus der Darstellung der Projektion (siehe Lemma 1.1.6), sowie mit der Darstellungen und (wie oben in dem Beweis beschrieben), erhält man die Ungleichung:

, für alle .

Da ist und hier den Rieszschen Darstellungsoperator bezeichnet, ist diese Darstellung äquivalent zu:

(*) , für alle .

Damit löst eine durch die Bedingung zusätzlich eingeschränkte Variationsgleichung.

Sei nun beliebig und fixiert. Dann folgt aus (*) **speziell:**

Wegen der starken Monotonie, welche nach Vereinbarung 1.1.4 gilt, sowie dem Lemma 1.1.5 erhält man nun:

und damit gilt die Abschätzung:

(**)

.

Da fixiert bleiben kann, selbst wenn der Parameter vergrößert wird, läßt sich so wählen, daß gilt:

.

Mit **(**)** erhält man dann:

.

Zu zeigen ist nun, daß hieraus mit der Darstellung **(*)** folgt:

(***) , für alle .

Dies zeigen wir durch Widerspruch.
Wir nehmen an, daß **(***)** **nicht** gilt. Das heißt, es existiert ein derart, daß gilt:

.

Wegen **(*)** gilt und folglich . Wir wählen

auf der Verbindungsstrecke zwischen und mit dem Wert definiert durch:

.

Wegen ist . Ferner hat man:

.

Aus der Konvexität von *G* folgt nun . Aus und der Definition von folgt nun:

Dies steht mit im Widerspruch zu (*). **Das bedeutet, die Annahme war falsch und damit (***)** richtig. Das heißt bildet eine Lösung der Variationsungleichung aus Definition 1.1.2. Die Eindeutigkeit folgt aus der Monotonieeigenschaft, wie in der Vereinbarung 1.1.4 unter dem ersten Punkt beschrieben. Die behauptete a-priori Abschätzung wurde bereits durch **(**)** nachgewiesen. **Q.E.D.**

Bereits im Beweis zu Lemma 1.1.6 wurde die Verbindung zwischen restringierten Variationsaufgaben und Variationsungleichungen genutzt. In Verallgemeinerung dazu gilt folgendes Lemma:

<u>118</u> **<u>Lemma</u>**

sei ein auf *G* differenzierbares Funktional.

Ist Lösung des Variationsproblemes

, mit ,

so folgt, daß *u* auch der Variationsungleichung

für alle

genügt.

Gilt außerdem, daß *J* konvex ist, so bildet die Variationsungleichungsdarstellung eine hinreichende Bedingung dafür, daß das Variationsproblem löst.

<u>119</u> **<u>Definition (Kegel)</u>**

Sei *W* ein reeller Hilbert- Raum. Eine Menge heißt Kegel<u>, genau dann wenn gilt:</u>

.

<u>1110</u> **<u>Präzisierung von *G*</u>**

Zur Erzeugung einer Approximation G_h (siehe spätere Referate), benötigen wir eine präzisere Darstellung von *G*.

Sei also *W* ein weiterer reeller Hilbert- Raum. sei ein konvexer, abgeschlossener Kegel. Es sei eine stetige Bilinearform.

Es sei definiert durch: , mit .

Damit gilt nun:

<u>1111</u> **<u>Lemma</u>**

Sei definiert durch: , mit (wie oben beschrieben). Außerdem genüge den gemischten Variationsungleichungen:

Dann löst *u* die Variationsungleichung aus Definition 1.1.2.

<u>Beweis:</u>

Da ein konvexer Kegel ist, folgt aus und stets:

Aus dem zweiten Teil der Darstellung der Variationsungleichung des Lemmas, sowie der Linearität von bzw. der Bilinearität von , folgt:

, für alle

Nach der Definition von *G* folgt, daß gilt.

Sei nun speziell bzw. . Daraus folgt:

bzw.

Also:

Mit dem ersten Teil der Darstellung aus dem Lemma gilt, da :

, für alle

Das liefert:

, für alle

Aus der Definition von *G* und da gilt, folgt:

, für alle

Damit löst u die Variationsungleichung aus Definition 1.1.2. **Q.E.D.**

Um sicher zu gehen, daß eine Lösung des gemischten Problems existiert, fordern wir im Fall von Variationsgleichungen, daß die Babuska-Brezzi-Bedingung erfüllt ist. Dies bedeutet:

.

<u>1112</u> <u>Satz</u>

Sei definiert durch , mit . Außerdem gelte die Babuska-Brezzi-Bedingung. Dann besitzt die gemischte Formulierung der Variationsungleichungen aus Lemma 1.1.11 eine Lösung .

<u>Beweis:</u>

Da ist und wegen Satz 1.1.7 hat die Variationsungleichung aus Definition 1.1.2 eine eindeutig bestimmte Lösung . Sei nun Z *durch*

definiert. Damit gilt außerdem für alle . Weil ein linearer Unterraum ist, folgt nun aus der in Definition 1.1.2 beschriebenen Variationsungleichung, daß gilt:

.

Nach den Voraussetzungen gilt die Babuska-Brezzi-Bedingung. Darum existiert ein so, daß gilt:

Außerdem gibt es ein mit der Eigenschaft, daß gilt:

(*)

Aus der Darstellung der Menge G und folgt, daß sowohl , als auch gilt. Wählt man nun bzw. , so erhält man aus der Variationsungleichung :

bzw. .

Also

.

Mit folgt dann:

.

Wählt man in **(*)** für w nun speziell , so gilt dann:

(**)

Da und ist, erhält man folgende Darstellung:

, für alle

Es bleibt noch zu zeigen, daß . Aus der Definition von G *und* (**) **folgt:**

, für alle .

Mit der Babuska-Brezzi-Bedingung liefert dies, daß gilt. **Q.E.D.**

<u>1113 Beschreibung eines Lagrange- Funktionals</u>

Sei wieder definiert durch: , mit .

Sei wieder ein Kegel. So kann man ein Lagrange- Funktional durch

, für alle

definieren.

<u>1114 Definition (Sattelpunkt)</u>

Gilt , so heißt das Paar Sattelpunkt des durch

, für alle

definierten Lagrange- Funktionals.

<u>1115 Lemma</u>

Sei ein Sattelpunkt des Lagrange- Funktionals . Dann löst u das Variationsproblem aus Lemma 1.1.8.

<u>Beweis:</u>

Mit Benutzung der Beweistechnik zu Lemma 1.1.11, funktioniert der Beweis analog zu dem der Sattelpunktaussage für Variationsgleichungen.